PROCEDIMIENTO NUMÉRICO PARA EL MODELADO DE MATERIALES HIPERELÁSTICOS SOMETIDOS A TENSIÓN

[1]Estrada Barbosa Quirino, [1]Szwedowicz Wasik Dariusz, [2]Majewski Szymiec Tadeusz, [3]Bedolla Hernández Jorge Cortés García Claudia[1], Martínez Rayón Eladio[1]

[1]Departamento de Ingeniería Mecánica, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Prolongación Av. Palmira esquina Apatzingán, Cuernavaca, Morelos, México.
Teléfono (777) 362 7770

[2]Departamento de Ingeniería Industrial y Mecánica, Universidad de las Américas-Puebla
Ex Hacienda Santa Catarina Mártir S/N, San Andrés Cholula, Puebla, México.
Teléfono (222) 229 2673

[3]Departamento Metal-Mecánica, Instituto Tecnológico de Apizaco
Av. Instituto Tecnológico S/N, Apizaco, Tlaxcala, México.
Teléfono (241) 417 2010

strata18@cenidet.edu.mx, d.sz@cenidet.edu.mx.com, tadeusz.majewski@udlap.mx, ljbedolla@itapizaco.edu.mx, claudia@cenidet.edu.mx, mare@cenidet.edu.mx

RESUMEN.

En este trabajo se presenta la elaboración de un procedimiento y desarrollo de una metodología para el modelado numérico con propiedades hiperelasticas. La corroboración de la metodología se realizó mediante la simulación de un ensayo a tensión en el software comercial de elementos finitos Abaqus. La geometría de la probeta y condiciones de la frontera del modelo discreto se establecieron de acuerdo a la norma ASTM D-638, referente a pruebas de plásticos sometidos a tensión. En base al presente estudio se encontró que el modelo constitutivo de Marlow presenta una mejor aproximación del comportamiento hiperelástico de gomas al ser sometidas a cargas de tensión.

ABSTRACT

A procedure and development of a methodology to numerical modeling with hyperelastics properties is presented in this resource. The methodology was corroborated by a tensile test simulation carried out in finite element software, ABAQUS. The specimen dimensions and boundary conditions of discrete model were established in accord to Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics, ASTM D-638. According to this work the Marlow model has a better approximation of hyperelastic behavior of rubber under tension loads.

NOMENCLATURA

W(E)	Energía de deformación
S	Medida de esfuerzo (Piola –Kirchoff)
E	Medida de deformación (Green)
I_1, I_2, I_3	Invariantes del tensor de deformación
λ_1, λ_2, λ_3	Alargamientos principales
N	Orden de la función de energía.
C_{ijk}	Constantes del material (Experimental)
J_{el}	Es la razón de cambio de volumen
D_i	Constantes del material (Experimental)
W_{dev}	Componente deviatórica de la función de energía
W_{vol}	Componente volumétrica de la función de energía
α_i, μ_i	Constantes del material
σ_{nom}	Esfuerzo nominal
F_x	Fuerza en dirección x
A_0	Área inicial
ε_{nom}	Deformación nominal
x_1	Desplazamiento del punto 1
x_2	Desplazamiento del punto 2
L_0	Longitud inicial entre el punto 1 y 2

INTRODUCCIÓN

Actualmente en diversas áreas de ingeniería está en ascenso la aplicación de elastómeros, particularmente en el control de cargas de impacto y vibraciones mecánicas. La capacidad por parte de un elastómero de asumir grandes deformaciones y posterior retorno a su estado inicial al ser descargados, se denomina hiperelasticidad [1]. Tal característica permite su utilización en diversas aplicaciones industriales. A diferencia de otros materiales cuyo comportamiento mecánico puede ser descrito a partir de las constantes elásticas del material (módulo de Young y coeficiente Poisson), las

ISBN 978-607-95309-9-0 Derechos Reservados © 2013, SOMIM

gomas presentan otras características no lineales como viscoelasticidad y ablandamiento del material [2]. Actualmente el Método de Elementos Finitos (MEF) se posiciona como una principal herramienta en el proceso de análisis en el diseño de productos basados en materiales elastoméricos. La mayor parte de los paquetes comerciales del MEF involucran diversos modelos constitutivos para describir el comportamiento hiperelástico. En general los modelos constitutivos están divididos en dos ramas, los primeros son modelos fenomenológicos basados en función de la densidad de energía de deformación y los segundos modelos denominados microestructurales. El desarrollo del procedimiento presentado advierte las consideraciones que deben ser tomadas en cuenta en la simulación numérica de materiales hiperelásticos, con el objeto de obtener resultados cercanos y congruentes a la realidad. El presente estudio se limitó a la implementación y evaluación de modelos fenomenológicos.

MODELOS CONSTITUTIVOS

Los modelos constitutivos permiten describir el comportamiento elástico no lineal de los elastómeros. En el desarrollo de tales modelos se supone un comportamiento elástico, isotrópico además de incompresibilidad del material. La hiperelasticidad se puede expresar en términos de la energía potencial de deformación W (E), la cual describe la cantidad de energía de deformación almacenada por unidad de volumen bajo un estado de deformación dado. [3]

$$W = W(E) \quad tal\ que \quad S = \frac{\partial W(E)}{\partial E} \tag{1}$$

De acuerdo a la teoría de Rivlin [4] la función de densidad de energía de deformación se puede expresar en términos de las invariantes de deformación de tal forma que:

$$W = f(I_1, I_2, I_3) \tag{2}$$

Adicionalmente las invariantes de deformación generalmente se expresan en función de los alargamientos principales [2].

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \tag{3}$$
$$I_2 = \lambda_1^2\,\lambda_2^2 + \lambda_2^2\,\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \tag{4}$$
$$I_3 = \lambda_1^2\,\lambda_2^2\,\lambda_3^2 \tag{5}$$

De esta forma la ecuación 2 se reescribe en la siguiente forma:

$$W = \sum_{i+j+k=1}^{N} C_{ijk}\,(I_1 - 3)^i\ (I_2 - 3)^j\ (I_3 - 3)^k \tag{6}$$

Considerando que la goma es cercana a la incompresibilidad, se obtiene la forma general del modelo de Rivlin para el caso de incompresibilidad. [4]

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij}\,(I_1 - 3)^i\ (I_2 - 3)^j \tag{7}$$

Las constantes se obtienen a partir de ensayos experimentales. A partir de la ecuación 6 se han desarrollado diversos modelos constitutivos basados en la primera y segunda invariante de deformación. A continuación se describen en su forma general algunos modelos básicos empleados en el desarrollo de este trabajo.

Forma Polinomial

La forma polinomial es un modelo basado en la primera y segunda invariante del tensor deviatórico de Cauchi-Green, y ha servido de base para el desarrollo de nuevos modelos constitutivos, se define a partir de la siguiente expresión. [5]

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij}(\bar{I}_1 - 3)^i(\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i+j=1}^{N} \frac{1}{D_i}(J^{el} - 3)^{2i} \tag{8}$$

La ecuación 8 es aplicable para pequeñas deformaciones y deformaciones nominales menores al 100%.

Modelo de Marlow

Modelo constitutivo dependiente de la primera invariante de deformación, se emplea cuando los datos experimentales disponibles son limitados. Este modelo reproduce exactamente los datos experimentales para un modo de deformación en específico. [5]

$$W = W_{dev}(\bar{I}_1) + W_{vol}(J^{el}) \tag{9}$$

 Derechos Reservados © 2013, SOMIM

Modelo de Ogden

Modelo propuesto por Ogden [6], utiliza los alargamientos principales en lugar de las invariantes de deformación.

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2}\left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{D_i}(J^{el} - 1)^{2i} \quad (10)$$

Este modelo presenta una buena respuesta frente a grandes deformaciones. Una de sus restricciones es que no se debe utilizar cuando los datos experimentales son limitados [5].

ENSAYOS EXPERIMENTALES

Las constantes del material presentes en las ecuaciones de los modelos hiperelásticos son obtenidas a partir de ensayos experimentales. Comúnmente suelen emplearse ensayos uniaxiales de tensión, uniaxiales de compresión, tensión plana y equibiaxiales de tensión. El método de obtención más común de las constantes es a partir del ajuste de las curvas experimentales por el método de mínimos cuadros. La Fig. 1 muestra los ensayos generalmente aplicables a gomas.

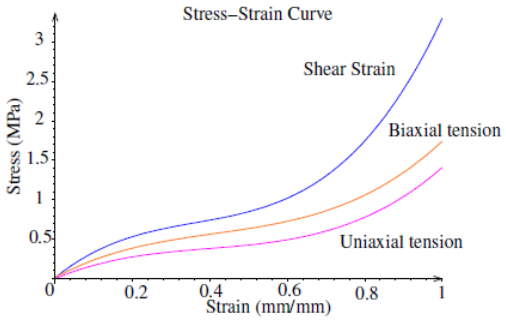

Figura 1. Ejemplos de la respuesta de las gomas frente a diversos ensayos [7]

PROCEDIMIENTO NUMÉRICO

La hiperelasticidad, es una de las propiedades más importantes en los elastómeros que debe ser tomada en cuenta al realizar modelos numéricos. La caracterización adecuada de la hiperelasticidad en los paquetes comerciales de elementos finitos requiere de una metodología que permita relacionar los modelos constitutivos con los datos experimentales disponibles. Tomando en cuenta lo anterior y para el caso específico se presenta un procedimiento el cual se muestra en la Figura 2 para ser implementado en el software ABAQUS. La metodología se encuentra divida en tres etapas:

1. Análisis del modelo real e identificación de condiciones de la frontera.

2. Selección del modelo de hiperelasticidad y evaluación automática del material.

3. Realización del modelo discreto y posterior validación con datos experimentales.

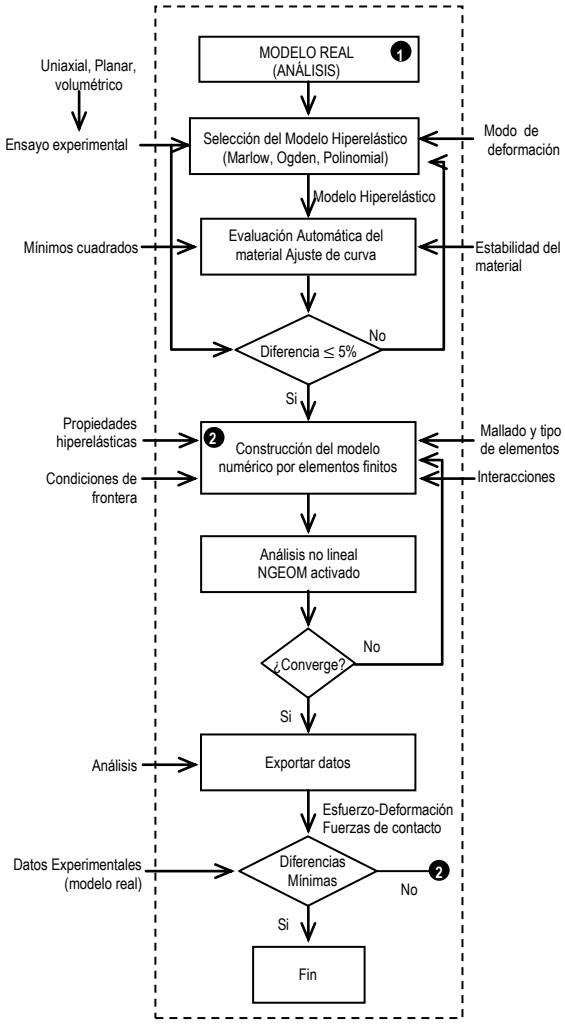

Figura 2. Procedimiento propuesto para simulación de materiales hiperelásticos.

Para poder evaluar el procedimiento se desarrolló un análisis por el MEF que involucró un ensayo a tensión de goma vulcanizada estandari-

 Derechos Reservados © 2013, SOMIM

zado por la norma ASTM D-638. Tomando en consideración que la carga aplicada al elastómero es de tensión, la caracterización hiperelástica del material puede realizarse a partir de un ensayo uniaxial de tensión. La figura 3 muestra la relación esfuerzo-deformación obtenida experimentalmente por Treloar al evaluar dicho elastómero [8].

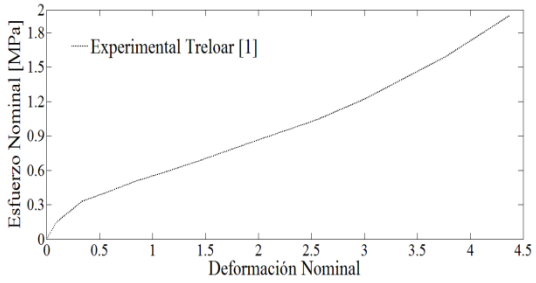

Figura 3. Caracterización de la goma vulcanizada [8]

De acuerdo al procedimiento, el modelo hiperelástico a elegir debe contemplar grandes deformaciones alrededor de 4.37 (437% de deformación nominal). Además es imprescindible tomar en consideración la información experimental limitada. Para fines prácticos de evaluación automática del material se eligieron cuatro modelos constitutivos (Mooney- Rivlin, Polinomial de segundo orden, Marlow y Ogden de primer de orden). En la figura 4 se presenta la comparación los resultados obtenidos.

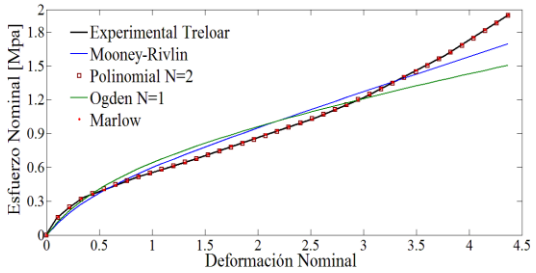

Figura 4. Evaluación automática de modelos hiperelásticos

Se observa en esta etapa que los modelos de Mooney Rivlin y Ogden de primer orden son los que tienen menor aproximación respecto a los datos experimentales de Treloar [8], el primero a consecuencia de ser de un orden muy bajo y el segundo por poseer datos experimentales limitados. Por otra parte el modelo de Marlow así como el Polinomial de segundo orden mostraron tener mejor respuesta que los anteriores. Finalizada esta etapa se continuó con la realización del modelo discreto del ensayo a tensión simple.

La geometría de la probeta así como las condiciones y solicitaciones del ensayo fueron tomadas de la norma ASTM D-638 referente a ensayos de tensión en plásticos. La Figura 5 muestra la geometría del espécimen experimental. [9]

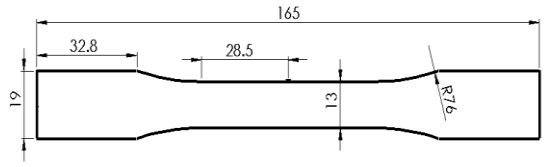

Figura 5. Geometría del espécimen ASTM D638 Tipo I (unidades en mm) [9]

Para poder reproducir acertadamente el ensayo a tensión, se determinaron las condiciones de frontera y parámetros propios del ensayo tal como la velocidad de carga. El modelo discreto-se realizó con base 2D y elementos continuos.

Una condición de encastre se confirió en los nodos del extremo izquierdo, la velocidad del ensayo se aplicó a los nodos del extremo derecho. La deformación del espécimen se definió en base a dos nodos de referencia x_1 y x_2 como se muestra en la Figura 6.

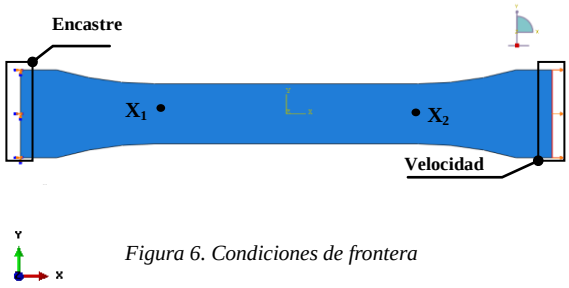

Figura 6. Condiciones de frontera

Durante el análisis de hiperelasticidad se utilizaron elementos del tipo CPS4R con integración reducida. La figura 7 presenta el modelo discreto de la probeta.

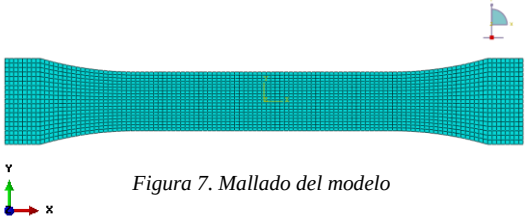

Figura 7. Mallado del modelo

 Derechos Reservados © 2013, SOMIM

El estado de deformación obtenido se muestra en la figura 8, donde se puede observar la propiedad hiperelástica alcanzada.

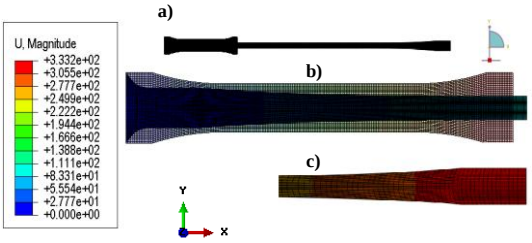

Figura 8. Deformación del espécimen ASTM D638 Tipo I, donde: a) Estado inicial y final de deformación, b) Deformación extremo izquierdo y c) Deformación en el extremo derecho.

Los esfuerzos se determinaron a partir de la suma de las fuerzas de reacción originadas a lo largo del extremo izquierdo de la probeta, tal y como se puede observar en la figura 9.

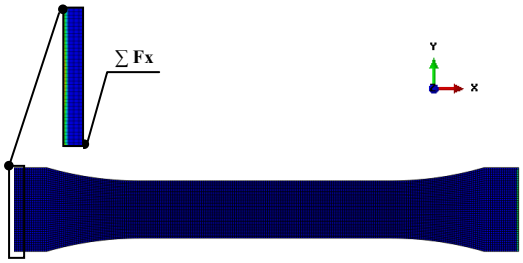

Figura 9. Fuerzas de reacción

Los valores de σ_{nom} y ε_{nom} se definieron de la siguiente manera [10]:

$$\sigma_{nom} = \frac{F_x}{A_0} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{nom} = \frac{(x_2 - x_1)}{L_o} \quad (12)$$

En la figura 10 se presenta la comparación de los datos experimentales con los modelos hiperelasticos aplicados al modelo discreto. A pesar de que el procedimiento indicaba solo utilizar el modelo de Marlow y Polinomial por tener mejor respuesta durante la evaluación automática del material, también se presenta otros modelos evaluados. En el modelo de Mooney Rivlin y el polinomial de segundo orden se advierte la poca efectividad de estos modelos para grandes deformaciones, haciéndose más visible en el primero, por ser un modelo constitutivo de primer orden. Respecto a deformaciones menores al 75 % se precisa una respuesta aceptable de ambos modelos con un 6% de diferencia respecto al ensayo experimental de Treloar [8]

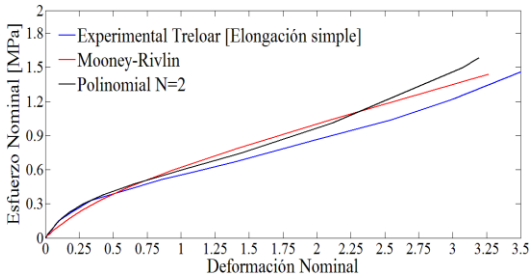

Figura 10. Respuesta de modelos constitutivos I

La respuesta del modelo de Ogden y de Marlow se aprecia en la figura 11, donde el primero de ellos presenta un comportamiento poco acertado para deformaciones mayores al 50%, consecuencia de una limitada información experimental durante la calibración del modelo.

En contraparte el modelo de Marlow presenta buena aproximación para pequeñas y grandes deformaciones variando la diferencia con la parte experimental en un 2 % para pequeñas deformaciones y en un 5% para deformaciones mayores al 100% de deformación.

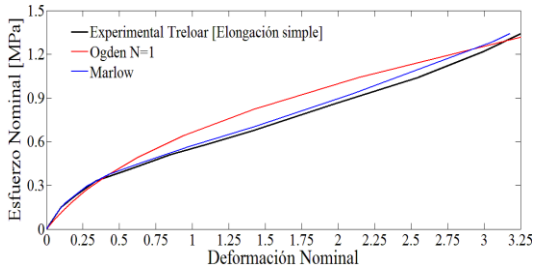

Figura 11. Respuesta de modelos constitutivos II

De esta forma se concluye el procedimiento presentado (ver figura 2), con un resultado satisfactorio con diferencias menores al 5% respecto al desarrollo experimental al utilizar el modelo de Marlow para describir el comportamiento hiperelástico. Esta reducida diferencia entre análisis se debe a que el modelo constitutivo de Marlow solo depende la primera

 Derechos Reservados © 2013, SOMIM

invariante de deformación I_1 y no requiere de múltiples ensayos experimentales para la calibración del modelo.

CONCLUSIONES

1. La obtención de resultados próximos a los experimentales requiere de un análisis previo de las condiciones a las cuales estará sometido el modelo real. Tal análisis permite la selección correcta del ensayo de calibración para el modelo hiperelástico (ensayos uniaxiales de tensión, uniaxiales de compresión, tensión plana, equi-biaxiales de tensión o volumétricos).

3. De acuerdo a los resultados presentados en la figura 4, modelos de primer o segundo orden tales como el modelo polinomial u Ogden no aseguran una mejor respuesta hiperelástica del modelo para deformaciones superiores al 50%, incluso puede originar tiempos de procesamiento computacional más prolongados.

4. Para modelos discretos sujetos a esfuerzos combinados, es necesario proveer la mayor cantidad de ensayos experimentales (tensión, compresión, cortantes) en el proceso de calibración del modelo hiperelástico.

5. Para deformaciones menores o iguales al 50% se obtuvo una buena aproximación (diferencias de 3 al 5% respecto a los datos experimentales) por parte de todos los modelos hiperelásticos evaluados. Para deformaciones mayores al 50 % y menores a 75% el modelo de Ogden empieza a diferir en gran porcentaje con los valores experimentales (diferencias de superiores al 7%). De esta forma al alcanzar deformaciones nominales iguales o mayores al 100% solo el modelo de Marlow representa con gran exactitud los datos experimentales obtenidos por Treloar [8] (diferencias menores al 5%).

REFERENCIAS

(1) Pascon, Coda, H. b., 2009. "*Modelos constitutivos para materiales hiperelásticos: Estudio e implementación computacional*." Cuadernos de Ingeniería de Estructuras. Sao Pablo, Brasil

(2) Austrell, 1997, "*Modeling of elasticity and damping for filled elastomers*", PhD Thesis, Lund University, Sweeden.

(3) Jarosław, R., Marlena, R., 2010, "*The Methodology of the Analysis of Elastomer Bearings Properties*", Slovaquia

(4) Rivlin R.S., 1948, " *Large Deformations of isotropic materials, IV. Further Develompments of the general theory*". Phil. Trans. R. Soc. United States.

(5) Hibbit, Karlson & Sorensen, 2005, "*Abaqus/standar User's Manual Vol. II"*, United State.

(6) Ogden, R.W., 1972. "*Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*". Proc. R. Soc. Lond. A, United States.

(7) García, M. Ruiz, C., 2005, "*Hyperelastic Material Modeling*", Reporte Técnico, Universidad EAFIT, Colombia.

(8) Treloar, L., R., 1949. " *The physics of rubber elasticity*", Oxford Univ. Press, New York.

(9) ASTM D 638-99, 1999, "*Standard Test Method for Tensile Strength of Plastics*", Annual Book of ASTM Standards, ASTM International, West Conshohocken, PA.

(10) Mendizabal, A., 2010, "*Finite Element Simulation:Tensile test of rib cortical bone",* Chalmers University of Technology, Master Thesis, Sweden.

 Derechos Reservados © 2013, SOMIM