Comparación del acoplamiento del modelo de respuesta de un rotor teórico con las impedancias mecánicas de sus apoyos

Evaristo Hernández Marceliz[1], Alfonso C. García Reynoso[1,2], Enrique Ladrón de Guevara Durán[1,2], Rolando Maroño Rodriguez[1], Jorge Arturo Mendoza Sosa[1]
1 Instituto Tecnológico de Veracruz,
2 Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana
evaristo.hernandez@gmail.com

Resumen

Se presenta una metodología que demuestra que mediante el acoplamiento de la matriz de las funciones de respuesta de frecuencias (FRF) de un rotor en condiciones de apoyo libre-libre, con una matriz que represente las impedancias mecánicas de los apoyos, se puede obtener el modelo de respuesta del rotor en sus condiciones reales de soporte. La metodología se aplicó a un rotor teórico modelado con el programa VELCRI en condiciones de apoyo libre-libre, del cual se obtuvieron las formas modales relativas para cada una de las frecuencias naturales del rotor experimental. Se desarrolló un programa para obtener las masas modales y así tener las formas modales normalizadas con respecto a la masa. A partir del modelo modal se obtuvo el modelo de respuesta del rotor teórico y se realizó el acoplamiento con la matriz de impedancias mecánicas de los apoyos. El resultado se comparó con el mismo rotor modelado con el programa VELCRI, pero ahora en los apoyos.

Abstract

A methodology is presented that shows that by means of the matrix coupling of the frequency response functions (FRF) of a rotor in conditions of free-free support, with a matrix that represents the mechanical impedance of the supports, the model of response can be obtained for the rotor in its real support conditions. The methodology is applied to a rotor model by means of the program VELCRI in conditions of free-free support, from which the relative mode shapes for each of the natural frequencies are obtained for the experimental rotor. An algorithm is developed to obtain the modal masses and thus to have the mode shapes normalized with regards to the mass. From the model of modal analysis, a model of response was obtained for the theoretical rotor and the coupling with the matrix of mechanical impedance of the supports was carried out. The result was compared with the same rotor modeled with the program VELCRI, but now in the supports.

Palabras claves: acoplamiento dinámico, funciones de respuesta de frecuencias, modelo modal, modelo de respuesta, balanceo modal.

 Derechos Reservados © 2012, SOMIM

1. Introducción:

En este trabajo se presenta un método de acoplamiento dinámico de dos estructuras utilizando los modelos de respuesta y modal. Se analiza de manera teórica cada estructura y se obtiene el modelo modal de la misma, posteriormente se obtiene el modelo de respuesta de ellas y se realiza el acoplamiento dinámico, en el paso siguiente se analizan las dos estructuras ya acopladas y se obtiene su modelo de respuesta, se comparan los dos resultados

2. El acoplamiento de Impedancias:

La técnica de acoplamiento de impedancias utiliza modelos de los componentes derivados directamente de datos de funciones de respuesta en la frecuencia (FRF), como se muestra en la siguiente figura:

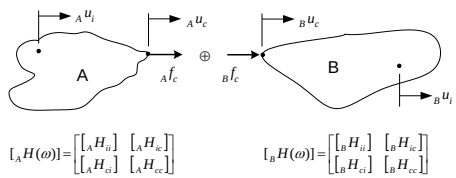


Figura 1. Representación de la técnica de acoplamiento de FRF.

Las propiedades dinámicas de estos modelos se sintetizan en términos de la matriz de FRF y generalmente se denotan como $[H(\omega)]$ (tal como las matrices de receptancia, movilidad o acelerancia).

Las coordenadas involucradas en la conexión entre los dos componentes A y B se representarán con el subíndice *c*, mientras que las coordenadas restantes, es decir, las que no intervienen en el acoplamiento, se designarán con el subíndice *i*. Teniendo en cuenta la convención anterior, las matrices de FRF de los componentes pueden dividirse de la siguiente manera:

$$[{}_A H(\omega)] = \begin{bmatrix} [{}_A H_{ii}] & [{}_A H_{ic}] \\ [{}_A H_{ci}] & [{}_A H_{cc}] \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[{}_B H(\omega)] = \begin{bmatrix} [{}_B H_{ii}] & [{}_B H_{ic}] \\ [{}_B H_{ci}] & [{}_B H_{cc}] \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde ${}_A H(\omega)$ y ${}_B H(\omega)$ tienen N_A y N_B grados de libertad, respectivamente.

Estableciendo las ecuaciones de equilibrio de los desplazamientos (*u*) y las fuerzas (*f*) en la conexión de los componentes:

$$\begin{aligned} \{{}_A u_c\} &= -\{{}_B u_c\} = \{0\} \\ \{{}_A f_c\} &= -\{{}_B f_c\} = \{f_c\} \end{aligned} \quad (3)$$

la matriz de FRF de la estructura acoplada resulta en:

$$[{}_C H(\omega)] = \left[[{}_A H(\omega)]^{-1} \oplus [{}_B H(\omega)]^{-1} \right]^{-1} \quad (4)$$

Esta matriz de FRF tendrá $N_C = N_A + N_B - N_c$ grados de libertad, donde N_c es la cantidad de grados de libertad que intervienen en la conexión. La operación $\oplus$ denota el acoplamiento y corresponde al siguiente ensamble de impedancias:

$$[{}_C H(\omega)] = \begin{bmatrix} [{}_A Z_{ii}] & [{}_A Z_{ic}] & [0] \\ [{}_A Z_{ci}] & [{}_A Z_{cc}] + [{}_B Z_{cc}] & [{}_B Z_{ci}] \\ [0] & [{}_B Z_{ic}] & [{}_B Z_{ii}] \end{bmatrix}^{-1} \quad (5)$$

En esta última matriz, cada término $[Z(\omega)]$ representa una submatriz de impedancia $[H(\omega)]^{-1}$.

El acoplamiento de impedancias, tal y como está indicado en las ecuaciones (4) y (5), aunque muestra claramente el papel que juega cada submatriz de FRF dentro del ensamble, tiene la desventaja de que requiere tres inversiones matriciales para cada frecuencia ω a determinar (en el caso de dos componentes). En ocasiones, lo anterior puede significar un problema grave, al menos en ciertos intervalos de frecuencia; sobre todo con matrices de FRF deficientes en el rango, donde la rigidez local puede causar dependencia en los renglones de la matriz [4], que produzcan inestabilidad en los algoritmos de inversión de matrices.

Una técnica de acoplamiento desarrollada por Jetmundsen et al. y presentada por Mendes Maia, N.M., Montalvão e Silva, J. M., He, J., et al [7] redujo de tres a una, el número de inversiones requeridas para cada frecuencia. Esta técnica también posee la ventaja de que el tamaño de la matriz a invertir está dictado únicamente por el número de coordenadas a acoplar. Lo anterior tiene como resultado que este método además de

 Derechos Reservados © 2012, SOMIM

acelerar los cálculos puede comportarse mejor en términos numéricos que la técnica expresada en la ecuación (5). La matriz de FRF de la estructura acoplada se obtiene a partir de:

$$[{}_C H(\omega)] = \begin{bmatrix} [{}_A H_{ii}] & [{}_A H_{ic}] & [0] \\ [{}_A H_{ci}] & [{}_A H_{cc}] & [0] \\ [0] & [0] & [{}_B H_{ii}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [{}_A H_{ic}] \\ [{}_A H_{cc}] \\ -[{}_B H_{ic}] \end{bmatrix} \left[[{}_A H_{cc}] + [{}_B H_{cc}] \right]^{-1} \begin{bmatrix} [{}_A H_{ic}] \\ [{}_A H_{cc}] \\ -[{}_B H_{ic}] \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

Un estudio realizado por Maroño y Aguirre [5] pone de manifiesto que la técnica de acoplamiento de FRF es muy sensible al ruido en las señales, por lo que no recomienda utilizar directamente las FRF adquiridas, sino realizar una identificación de parámetros sobre ellas y regenerarlas. El estudio también demostró que otro de los factores que influyen fuertemente en el acoplamiento es la inclusión de modos de cuerpo rígido de los componentes. La ausencia de ellos pueden dar como resultado un acoplamiento deficiente o pérdida de modos flexionantes. La variación en la cantidad de cifras significativas empleadas en los modelos de respuesta de los componentes para acoplar, produce un efecto similar al ruido aleatorio, aunque muy pequeño.

3. **Datos del rotor libre**:

El rotor experimental teórico con que se trabajó se supone hecho de acero con módulo de elasticidad de 206.8×10^9 Pa, relación de Poisson de 0.3, módulo de corte de 7.9538×10^{10} Pa y densidad de 7860 Kg/m^3. El rotor tiene una longitud de 1.2 m y 0.02 m de diámetro constante.

Se utilizó el programa VELCRI para modelar el rotor; considerando que éste se encuentra en condiciones de apoyo libre-libre y dividido en seis segmentos. Se agregaron apoyos con rigideces de 1 N/m, dado que el programa no puede modelar sistemas en condiciones sujeción libre-libre; estos valores son lo suficientemente pequeños para no afectar la condición libre-libre del rotor.

Las frecuencias naturales obtenidas de la corrida de VELCRI se muestran a continuación:

Modos de cuerpo rígido	
Modo	Frecuencia (Hz)
1	0.1308
2	0.2263
Modos flexionantes	
Modo	Frecuencia (Hz)
1	62.80
2	173.04
3	339.56
4	562.31
5	841.42
6	1175.89

Tabla 1 Frecuencias de cada uno de los modos

El programa arroja como parte de sus resultados los desplazamientos en puntos específicos del rotor. Para obtener el modelo modal del rotor es necesario:

1. Obtener las formas modales del rotor relacionadas con respecto a algún punto o alguna posición específica.
2. Obtener la masa modal de cada uno de los modos del rotor relativa al mismo punto del inciso anterior.
3. Obtener la forma modal del rotor normalizada con respecto a su masa modal.

Se desarrolló una hoja de cálculo en Excel que adquiere los datos de uno de los archivos generados por la corrida de VELCRI, esta hoja realiza los tres pasos anteriores y con ello se obtiene el modelo modal del rotor en condiciones de apoyo libre-libre.

En la tabla 2 se presentan los valores de los coeficientes de las formas modales para los seis primeros modos de vibración del rotor libre-libre, obtenidas con VELCRI y normalizados con respecto a las masas modales. Se considera un amortiguamiento, estructural, con un valor de z=0.001 para todos los modos de vibración.

x (m)	Modo 1 Rígido	Modo 2 Rígido	$\varphi^{(1)}$ (m/m)	$\varphi^{(2)}$ (m/m)	$\varphi^{(3)}$ (m/m)	$\varphi^{(4)}$ (m/m)	$\varphi^{(5)}$ (m/m)	$\varphi^{(6)}$ (m/m)
0	0.58130	-1.00534	-1.15733	-1.15149	-1.14565	-1.14245	-1.14490	-1.15448
0.1	0.58130	-0.8378	-0.70934	-0.40086	-0.11452	0.14697	0.37366	0.55776
0.4	0.58131	-0.33511	0.43087	0.75406	0.19576	-0.58815	-0.79768	-0.21544
0.6	0.58131	0	0.70543	0	-0.82726	0	0.82368	0
0.8	0.58131	0.33511	0.43088	-0.75406	0.19576	0.58815	-0.79768	0.21542
1.1	0.58130	0.8378	-0.70934	0.40086	-0.11452	-0.14697	0.37365	-0.55777
1.2	0.58130	1.00534	-1.15733	1.15149	-1.14565	1.14245	-1.14492	1.15486

Tabla 2. Coeficientes de las primeras seis formas modales obtenidas para el rotor en condiciones de apoyo libre-libre.

 Derechos Reservados © 2012, SOMIM

4. **Datos de los apoyos:**

Los apoyos que se acoplarán al rotor tienen rigideces 1×10^8 N/m se colocan a 0.1 m de los extremos.

La matriz de impedancia mecánica para los apoyos propuestos del rotor en todas las frecuencias de análisis es la siguiente:

$$Z(\omega)=\begin{bmatrix}1\times10^8 & 0\\ 0 & 1\times10^8\end{bmatrix}\quad N/m$$

5. **Rotor en los apoyos**:

Ahora se considera evaluar las características dinámicas del rotor con los apoyos propuestos, para lograr esto se utiliza nuevamente el programa VELCRI, ahora con los datos de los apoyos, y la información obtenida se muestra en la Tabla 3.

Modo	1	2	3	4	5	6
Frecuencia (Hz)	39.76	155.71	336.70	553.29	747.66	923.56

Tabla 3. Frecuencias naturales obtenidas con VELCRI para el rotor en sus apoyos.

Para este sistema se aplica nuevamente la metodología desarrollada para obtener el modelo modal del rotor. Los valores de los coeficientes modales normalizados con respecto a la masa para los puntos seleccionados se muestran en la Tabla 4.

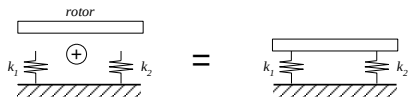
x (m)	$\varphi^{(1)}$ (m/m)	$\varphi^{(2)}$ (m/m)	$\varphi^{(3)}$ (m/m)	$\varphi^{(4)}$ (m/m)	$\varphi^{(5)}$ (m/m)	$\varphi^{(6)}$ (m/m)
0	-0.28158	-0.57330	-0.93894	-1.47526	-1.93331	-1.80983
0.1	0.00042	0.00252	0.00329	-0.01321	-0.06499	-0.12605
0.4	0.72375	0.82811	0.20254	-0.56285	-0.59048	0.07151
0.6	0.89406	1.6373E-06	-0.85169	1.6223E-05	0.63546	9.0555E-05
0.8	0.72375	-0.82811	0.20254	0.56283	-0.59065	-0.07169
1.1	0.00042	-0.00252	0.00329	0.01321	-0.06496	0.12610
1.2	-0.28158	0.57331	-0.93895	1.47521	-1.93306	1.80950

Tabla 4. Coeficientes de las primeras seis formas modales obtenidas para el rotor en sus apoyos.

Con el modelo modal del rotor en sus apoyos, se obtiene el modelo de respuesta del mismo. El cálculo del modelo de respuesta del rotor se realizó mediante un programa hecho con MATLAB.

6. **Acoplamiento de los modelos**:

El rotor en condiciones de soporte libre-libre se unió con la matriz que representa las impedancias mecánicas de los apoyos mediante la técnica de acoplamiento de FRF definida en las ecuaciones (5) y (6) y como se indica en la Figura siguiente:



$$\left[H(\omega)_{rotor}\right]^{-1}\oplus\left[H(\omega)_{apoyos}\right]^{-1}=Z(\omega)_{conjunto}$$

$$\left[Z(\omega)_{conjunto}\right]^{-1}=H(\omega)_{conjunto}$$

Figura 2. Esquema del acoplamiento del rotor a sus apoyos

Para ello se implementó la técnica en un programa en Matlab que se encarga de:

1. La matriz de impedancia mecánica de los apoyos, convertirla a la matriz de receptancia de los mismos.
2. Realizar el acoplamiento de las receptancias del rotor, con la de las impedancias.
3. Graficar una de las receptancias obtenidas.

La Figura 3 muestra las curvas de las receptancias correspondiente al punto 1(x = 0.0 m). Una de ellas corresponde al modelo del rotor en sus apoyos y la otra al acoplamiento del rotor en condiciones de apoyo libre-libre con la matriz de impedancias mecánicas de los apoyos.

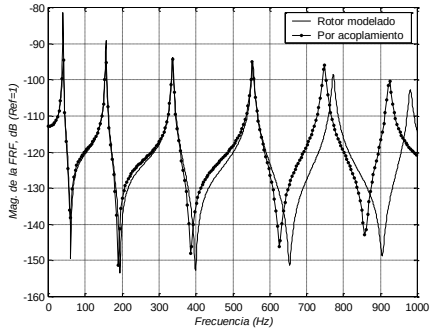


Figura 3. Gráfica de la receptancia para el punto (1,1) del rotor en sus apoyos.

La coherencia entre las dos FRF se verificó utilizando el criterio FRAC [5], obteniéndose un valor de 0.6983. La diferencia existente entre las dos FRF puede explicarse por el hecho de que el método de acoplamiento dado en la Ec. (6) requiere una gran cantidad de modos para producir una alta coherencia, o de manera inversa, utilizar un pequeño intervalo de frecuencias, como se reporta en [6]. Tomando esto en cuenta, si el intervalo de frecuencias de análisis se reduce por ejemplo hasta los 700 Hz, el valor del FRAC entre las dos FRF aumenta hasta 0.9884.

 Derechos Reservados © 2012, SOMIM

Conclusiones:

Se demostró que es posible obtener un modelo de respuesta de un rotor en sus apoyos reales a partir del conocimiento del modelo modal del rotor obtenido en condiciones de apoyo libre-libre, y de un juego de impedancias mecánicas de los apoyos mediante una técnica de acoplamiento de impedancias.

Esto contribuye al desarrollo de una técnica de balanceo modal de rotores, partiendo del conocimiento de un modelo modal o bien de un modelo de respuesta obtenidos experimentalmente, y desarrollando una metodología para encontrar un juego de valores de impedancias mecánicas de los apoyos reales del rotor para cada una de sus frecuencias naturales.

Referencias

[1].- Ewins, D.J., 1995, Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press, London.

[2].- Griffiths, David, 1988, "The Physical Significance of the Modal Mass for Lightly Damped Structures", Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, pp. 464-467, Kissimmee, Flo.

[3].- Hernández M. E., Maroño R. R. Desarrollo de un modelo de respuesta de un rotor experimental, Primer Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica, 1999, Minatitlán Ver.

[4].- Maroño R. R. y Hernández M. E., 2000, Implementación de técnicas de acoplamiento dinámico, Reporte Interno, Laboratorio de Dinámica, Instituto Tecnológico de Veracruz.

[5].- Maroño R. y Aguirre R., 2001, "Correlación de Formas Modales y FRF", Nota técnica MM/LD # 3, Instituto Tecnológico de Veracruz, Departamento de Metal-Mecánica, Veracruz, Ver.

[6]. Maroño R., 2002, "Estudio sobre la sensibilidad del método de acoplamiento de FRF ante diversos parámetros relevantes", Informe técnico, CENIDET, Cuernavaca, Mor.

[7].- Mendes Maia, N.M., Montalvão e Silva, J. M., He, J., et al., 1997, Theoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press, England.

[8].- Urgueira, A. P. V., 1989, Dynamics Analysis of Coupled Structures Using Experimental Data, Ph. D. Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, England

 Derechos Reservados © 2012, SOMIM