Análisis de sensibilidad en el modelamiento del comportamiento de un acero a tasas de deformación medias

Sensitivity analysis on the modeling of a steel under intermediate strain rates

Andrés Felipe Ramírez López, Luis Ernesto Muñoz Camargo
Universidad de los Andes, Departamento de Ingeniería Mecánica. Bogotá, Colombia

RESUMEN

Este trabajo estudia la sensibilidad paramétrica que se tiene en el modelamiento dinámico por elementos finitos de las deformaciones plásticas de barras de acero, las cuales se cargan dinámicamente con impactos que originan tasas de deformación medias (desde 10^{-1} hasta 10^{3} s^{-1}). Se escogieron tres parámetros críticos a partir de un análisis de sensibilidad preliminar, en el que se estudió la influencia que tienen la geometría, la fricción y los parámetros constitutivos del material sobre el proceso de deformación de un sistema. Para estos parámetros (i.e. módulo de Young, coeficiente de deformación y momento de inercia del área transversal) se calcularon los coeficientes de sensibilidad sobre cinco índices de desempeño de la respuesta del sistema. Se encontró que el coeficiente de deformación presenta un efecto fuertemente no lineal sobre los cinco índices a diferencia del momento de inercia y del módulo de Young para los cuales hay una vecindad linealizable alrededor de la condición nominal que contiene siempre el intervalo definido por ±1% del valor nominal del parámetro. Adicionalmente se realizó un estudio de la variación comercial sobre el momento de inercia y el módulo de Young, y combinando esta información con los índices de sensibilidad encontrados se analizó la variación originada por el uso de materiales comerciales para los cinco índices, presentando un posible método para definir los controles de calidad requeridos para garantizar la repetibilidad de los resultados obtenidos en procesos que involucran tasas de deformación medias.

ABSTRACT

This work concerns the parametric sensitivity on the finite element dynamic modelling of plastic deformations in steel bars, loaded dynamically with impacts that cause "intermediate" strain rates (10^{-1} to 10^{3} s^{-1}). Three critical parameters were chosen based on a preliminary sensitivity analysis, which studied the influence on the deformation process of the test-rig geometry, friction, and constitutive parameters. For these parameters (i.e. Young modulus, strain coefficient and cross-sectional area moment of inertia) their sensitivity coefficients on five performance indices of the result were calculated. It was found that the strain coefficient presents a strongly non-linear effect on the five indices; on the other hand, the moment of inertia and the Young modulus have a linearizable neighborhood around the nominal condition that always contains the intervals defined by ±1% of the nominal value. In addition, a study on the commercial variation produced by the use of commercial materials was performed for the five indices. A proposed method is presented; that method allows to define the quality controls required in order to guarantee the repeatability on the results obtained from the processes that involve intermediate strain rates.

Keywords: Cowper-Symonds. Strain rate. Steel bars. Finite element dynamic modeling.

1 INTRODUCCIÓN

En la industria metal-mecánica, muchos de los procesos industriales se basan en los resultados derivados de pruebas de tensión nominal en metales [1]. Si se estudian procesos que ocurren a velocidades similares a las usadas durante las pruebas de caracterización de los materiales involucrados (generalmente realizadas a tasas de deformación cuasi-estáticas [2]), los resultados se predicen bien; pero, al cambiar la velocidad se hace evidente la dependencia de las propiedades del material frente a la tasa de deformación del proceso. Es común que al llevar a la línea de producción alguno de estos procesos se requiera deformar el material a una tasa mayor, y como resultado de la deficiencia en la predicción teórica no se obtienen los niveles de calidad esperados en el producto final.

Más allá de la industria metalmecánica existen también sistemas dinámicos que dependen de la deformación de los materiales a tasas de deformación diferentes de las cuasi-estáticas, requiriendo que no sólo que se llegue a un producto final sino que genere un cierto comportamiento en los desplazamientos, velocidades y aceleraciones a las que ocurre el proceso. Ante la exigencia de conocer no sólo el estado final, el nivel de detalle de tales aplicaciones es aún más exigente, por lo cual se necesita un estudio de los factores y propiedades que alteran las deformaciones involucradas. Se estudió específicamente el *Bar Bending Braking System* (BBBS), un sistema para realizar pruebas no destructivas que reproducen las desaceleraciones que se generan durante el choque de autos, disipando la energía cinética con la deformación plástica de una barra de acero. La respuesta del BBBS depende altamente de los parámetros y propiedades que afectan la deformación de la barra de acero.

Basados en este sistema, el presente artículo estudia la sensibilidad paramétrica de las deformaciones plásticas del acero; para lo cual se realizó un modelo de elementos finitos del sistema. Dicho modelo se realizó utilizando el paquete computacional ABAQUS®, especializado en análisis por elementos finitos que permite resolver ecuaciones dinámicas no lineales. Se modeló el BBBS usando un modelo matemático no lineal basado en las relaciones constitutivas del material, propuestas por Cowper & Symonds [4]. El modelo numérico ha sido validado al compararlo con mediciones experimentales del sistema, obtenidas en estudios previos [3]. Se partió de un trabajo que presenta la selección de la ecuación constitutiva adecuada para el modelo del sistema, y se valida el resultado numérico del modelo resultante, que se usa para realizar un estudio preliminar sobre la sensibilidad paramétrica de la deformación de la barra. Basado en estos estudios, se realizaron las simulaciones numéricas del BBBS variando el momento de inercia, el módulo de elasticidad y el coeficiente de deformación de la barra de deformación del sistema, con el fin de encontrar los coeficientes de sensibilidad de cada parámetro para cinco índices de desempeño del sistema. Estos coeficientes de sensibilidad se calcularon directamente por métodos diferenciales.

Con el fin de estudiar la sensibilidad paramétrica de la deformación de la barra de acero del sistema, se tomaron los tres factores más relevantes del sistema: 1) el momento de inercia de la sección transversal (I), 2) el módulo de elasticidad (E) y 3) el coeficiente de deformación del material de la barra (p) [3], y se calcularon los

coeficientes de sensibilidad de las tres propiedades sobre cinco índices de desempeño de la respuesta del sistema.

Por último se realizó un análisis de la variación que se presenta en el caso real, al usar múltiples barras comercialmente disponibles, y se estudió la variación del módulo de elasticidad y del momento de inercia con el fin de precisar la influencia que tiene la sensibilidad encontrada sobre el sistema real.

Se encontró que el parámetro más sensible es el momento de inercia del área transversal, seguido por el coeficiente de deformación y por último el módulo de elasticidad. De lo cual se observó que el coeficiente de deformación es el parámetro que presenta un comportamiento de no linealidad para los cinco índices estudiados; en cambio el momento de inercia y módulo de elasticidad presentan un comportamiento lineal entre el rango estudiado para los cinco índices. Por otro lado, se encontró que el control de calidad estricto en el material tanto en su caracterización como en su proceso de manufactura es indispensable para poder reproducir los datos necesarios del BBBS.

2 BBBS

El BBBS es un sistema para realizar pruebas dinámicas no destructivas, usado para la validación de sistemas de seguridad para los pasajeros de automóviles. El BBBS facilita la reproducción de las condiciones de desaceleración del auto en el momento del choque en un sitio específico. Este sistema está compuesto por dos barras de acero, las cuales están dispuestas de tal forma que una incida sobre la otra para deformarla plásticamente. La barra incidente se encuentra dispuesta sobre un riel y es impulsada externamente hasta obtener las condiciones de velocidad que reproducen las condiciones iniciales del impacto de interés, el cual se logra mediante el choque con la segunda barra (Figura 1a). La segunda barra está sujeta a cuatro pines rígidos que funcionan como restricciones para que en el momento del impacto esta barra se deforme (Figura 1b). La inercia del sistema se reproduce agregando masa a la barra incidente. Las simulaciones se realizaron para una condición en la cual la masa del sistema es de 2800 kg, y la velocidad de impacto es 20 km/h.

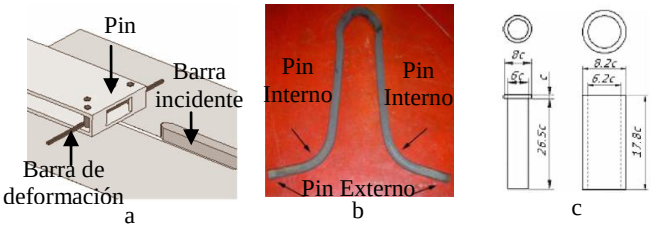

Figura 1: Sistema BBBS. a) Disposición de los pines y de las dos barras [3]. b) Fotografía de una barra deformada típica. Los indicadores muestran la ubicación de los pines [3]. c) Dimensiones del pin y buje respectivamente.

Los dos pines internos restringen el movimiento de la barra en la dirección de la barra incidente y ayudan a que la deformación se concentre en la parte central de la barra. Los pines externos hacen el trabajo de palanca para que los extremos de la barra no retrocedan en el momento de la deformación. Cada pin se ensambla en un buje para reducir la fricción y el desgaste de los elementos (las dimensiones de estos elementos se muestran en la Figura 1c).

La barra de deformación tiene una sección transversal de 35x35 mm y una longitud de 1500 mm, y está hecha de acero FE-360.

3 ESTUDIOS PREVIOS

Los estudios previos presentan un modelo numérico detallado que se basa en la ecuación constitutiva para incluir el efecto de la tasa de deformación propuesta por *Cowper & Symons (CS)* [4] (1), el cual parece ser el más apropiado para el modelo del comportamiento de los metales en los impactos a tasas de velocidades de deformación medias [3].

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{1/p} \right] \tag{1}$$

Donde p es el coeficiente de deformación del material, σ0 es el esfuerzo de fluencia antes de considerar el efecto de la tasa de deformación, ε̇0 es una referencia de la tasa de deformación de referencia, y ε̇ es la tasa de deformación del material

También se muestra la validación del sistema realizado en ABAQUS, encontrando que las simulaciones presentan errores menores al 5% en diferentes indicadores. Por otro lado, tras considerar un conjunto de siete parámetros involucrados en el sistema se muestra cómo los tres parámetros más sensibles son el momento de inercia, el coeficiente de deformación y el módulo de elasticidad. El análisis de sensibilidad presentado se basa en una planeación de las simulaciones basada en un plano factorial fraccional [5], que permite una primera aproximación para estimar los coeficientes de sensibilidad de los 7 parámetros estudiados, utilizando sólo 16 simulaciones y partiendo de la hipótesis de una baja influencia de efectos no lineales.

4 MODELO DE ELMENTOS FINITOS

El análisis dinámico se realizó por medio de un paquete comercial multipropósito ABAQUS© CAE, el cual implementa la integración de algoritmos para resolver las ecuaciones dinámicas no lineales. Específicamente para este estudio, las simulaciones dinámicas se realizaron por medio del uso de algoritmos de discretización explícita del tiempo con amortiguamiento, siendo computacionalmente más eficiente que los métodos de integración discreta típica de los implícitos tradicionales. Las simulaciones se basaban en la subincrementación automática del paso del tiempo presente en el código FEM. La formulación utilizada presenta estabilidad condicional al usar algoritmos de integración explícita, imponiendo una cota superior a la magnitud del paso temporal. En cada paso temporal el límite superior para el incremento Δt fue calculado por la siguiente ecuación:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \left(\sqrt{1 + \xi_{\max}^2} - \xi_{\max} \right) \tag{2}$$

Donde ω_{max} es la frecuencia máxima del sistema y ξ_{max} es una fracción del amortiguamiento crítico para el modo con frecuencia más alta del sistema. Adicionalmente, la inclusión de un pequeño amortiguamiento como viscosidad volumétrica permite controlar la oscilación de alta frecuencia.

Tras analizar de manera preliminar el comportamiento de los diversos cuerpos involucrados en el sistema, se encontró que tanto para la barra incidente como para la base en que se monta la barra los niveles de deformación alcanzados durante la prueba son muy bajos (la carga crítica de pandeo es 2.6 MN, y las cargas durante la prueba son siempre menores a 1 MN. Adicionalmente la rigidez de la barra incidente está cuatro órdenes de magnitud por encima de la de la barra de deformación). Este resultado permite simplificar el modelo numérico considerando estos dos cuerpos como rígidos. Por una razón análoga también se consideran como cuerpos rígidos cada uno de los pines y bujes.

Debido a la doble simetría de la barra de deformación (que se presenta alrededor del eje *x* y eje *z)*, el modelo del sistema se redujo a un cuarto del sistema original (Figura 2) incluyendo las respectivas condiciones de fronteras derivadas de las simetrías.

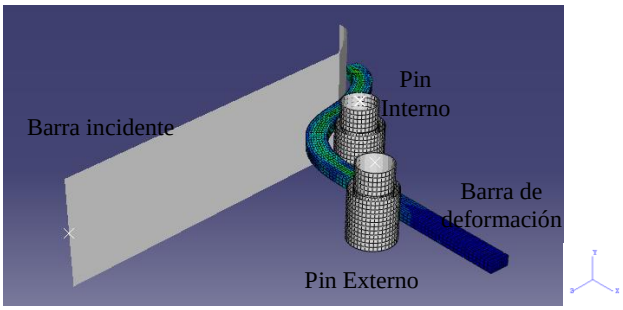

Figura 2: BBBS modelado en ABAQUS © CAE

Tras estas consideraciones la barra de deformación es el único elemento deformable en el modelo. Se realizó el mallado de dicha barra con un mallado estructurado, refinado en la zona central, donde se presenta simultáneamente la mayor deformación plástica

y se alcanza la más alta tasa de deformación. El tipo de elemento utilizado en la barra de deformación es el C3D8R, cuerpo sólido (C), tridimensional (3D) con 8 nodos (8), con integración reducida (R) y un orden geométrico lineal.

El modelo usado contiene 6315 nodos y 4837 elementos, de los cuales 2448 elementos pertenecen a la barra de deformación y 2389 pertenecen a las superficies de contacto de los pines y de los bujes, para modelar correctamente el contacto. Las condiciones de contacto se modelaron mediante una extensión exponencial del modelo clásico de *Coulomb* (3).

$$\mu = \mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-d_c \dot{\gamma}_{eq}} \quad (3)$$

Donde μ_k es el coeficiente de fricción cinético, μ_s es el coeficiente de fricción estático, d_c es el coeficiente de decaimiento y $\dot{\gamma}\gamma_{eq}$ es la tasa equivalente de deslizamiento. Los valores usados para el modelo se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de fricción usados en el modelo del BBBS [3]

	Barra incidente-barra-buje	*Pin/buje*
μ_s	0.35	0.35
μ_k	0.1	0.06
d_c	20	20

Para modelar la deformación elasto-plástica de la barra se utilizó la curva de esfuerzo-deformación real del material (Fe 360) obtenida con pruebas cuasi-estáticas. La parte plástica de la curva se incluyó con una discretización en 50 valores de esfuerzo con su respectiva deformación. La parte elástica se modeló utilizando el valor de 206 GPa para el módulo de elasticidad, encontrado a partir de la misma caracterización cuasi-estática. Los valores usados en el modelo de CS fueron tomados de la lectura [6]. Se utilizó como valor nominal de p 4.73 y como valor nominal de $\acute{\varepsilon}_0$ 424 s^{-1}.

Al simular el choque de las barras (Figura 2), se calculó la historia temporal de la desaceleración de la barra incidente y se comparó con los resultados obtenidos experimentalmente (Figura 3a).

5 ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Tras escoger los 3 parámetros que más afectan la respuesta de la deformación de la barra (i.e. I, p, E) se estudió la sensibilidad de la respuesta del sistema frente a dichos parámetros. La respuesta del sistema se reporta presentando tanto la historia temporal de la desaceleración, como a través de un conjunto de índices de desempeño que reflejan el comportamiento global, sintetizándolo en 5 indicadores. Se realizaron un total de 29 simulaciones, correspondientes a la simulación nominal, 8 simulaciones para cada parámetro cambiado dentro del intervalo comprendido entre ±10% respecto a su valor nominal y otras 4 simulaciones para refinar el estudio cuantitativo de sensibilidad del coeficiente de deformación. Los valores de los parámetros correspondientes a cada simulación se reportan en la Tabla 2.

Tabla 2: Valores de las variaciones usadas en las simulaciones

		E (GPa)	*I (cm^4)*	*P*
	-10%	185.4	11.3	4.26
	-7.50%	190.6	11.6	4.38
	-5.00%	195.7	11.9	4.49
	-2.50%	200.9	12.2	4.61
	-1.00%	------	------	4.68
	-0.50%	------	------	4.71
Variación	Nominal	206	12.5	4.73
	2.50%	-----	------	4.75
	1.00%	-----	------	4.78
	2.50%	211.2	12.8	4.85
	5.00%	216.3	13.1	4.97
	7.50%	221.5	13.4	5.08
	10%	226.6	13.8	5.2

5.1 Análisis Cualitativo

El análisis presenta una parte cualitativa, donde se reportan los cambios sufridos en la curva de aceleración con respecto al tiempo. Dichos cambios son el producto del cambio individual en cada parámetro de interés de hasta ±10% del valor nominal del parámetro. La Figura 3 presenta dichos cambios mostrando los extremos simulados así como la respuesta nominal.

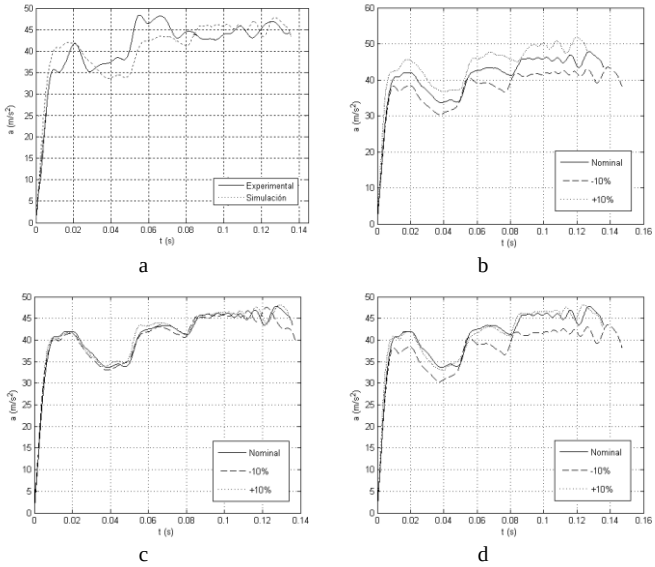

Figura 3: Desaceleración de la barra incidente. a) experimental vs simulación. b) para I. c) para E. d) para p.

Se puede ver en la Figura 3b, cómo al aumentar el momento de inercia de la barra, la gráfica de desaceleración aumenta; a aceleración promedio en toda la gráfica es mayor, como se muestra en la Tabla 3. Como consecuencia del cambio en la aceleración el tiempo que tarda la barra incidente en frenar es menor.

Tabla 3: Aceleración promedio y tiempo de frenado para la variación del momento de inercia

	t_f (ms)	a_{avg} (m/s^2)
-10%	146.9	37.8
Nominal	135.8	40.9
10%	126.2	44.0

La Figura 3c muestra cómo al aumentar el módulo de elasticidad de la barra, la gráfica de desaceleración aumenta ligeramente; la aceleración en la mayoría de los puntos es mayor, lo que se refleja en la Tabla 4, que reporta el cambio en la aceleración promedio. Se observa de nuevo una tendencia decreciente del tiempo de frenado con el aumento del módulo de elasticidad.

Tabla 4: Aceleración promedio y tiempo de frenado para la variación del módulo de elasticidad

	t_f (s)	a_{avg} (m/s^2)
-10%	137.1	40.5
Nominal	135.8	40.9
10%	134.5	41.3

En la Figura 3d, al comparar la respuesta nominal y las respuestas de ±10% se observa que los cambios en la desaceleración son diferentes. Para -10% se observa una disminución de la aceleración promedio en toda la gráfica y un aumento en el tiempo de frenado. En cambio, para +10% se observan tres zonas con comportamientos diferentes: 1) antes de 8 ms la aceleración promedio es mayor a la nominal, 2) entre 8 ms y 80 ms la aceleración promedio es menor, y 3) después de 80 ms la aceleración promedio vuelve a ser mayor con una pequeña disminución del tiempo de frenado. Este comportamiento altamente no lineal es el reflejo de las zonas en que resulta importante el coeficiente de deformación, es decir, de las zonas con alta tasa de deformación. La Figura 4 muestra la historia temporal de las dos zonas con mayor influencia de la tasa de deformación donde se puede ver claramente las tres zonas descritas anteriormente definidas por dos máximos locales de la grafica: 1) en 8 ms, donde la tasa de deformación es máxima debido a las deformaciones en la parte central de la barra (aquella que recibe directamente el impacto de la barra incidente, presentando el máximo de la tasa de deformación de todo el proceso); 2) en 80 ms, donde la deformación se presenta en la zona en contacto con el pin, que es el otro punto de grandes deformaciones sobre la barra (se muestra la parte en contacto con los pines donde se obtiene el máximo local de la tasa de deformación). Mientras que la tasa de deformación es baja (deformaciones a baja velocidad), la influencia del comportamiento dinámico del material en la respuesta del sistema

es baja. En el caso del BBBS en las condiciones en que se estudió, después de los 80 ms se han superado los máximos, tanto global como local, originados por las zonas de gran deformación, obteniendo así una división en la cual se separan las zonas con alta y baja influencia del comportamiento dinámico.

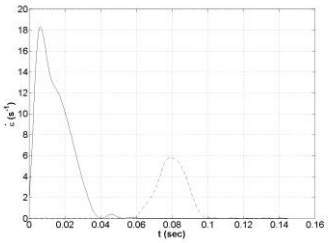

Figura 4: Historia de la tasa de deformación plástica durante la simulación. La línea continua representa la zona en el momento de la deformación en la parte central de la barra

Tabla 5: Aceleración promedio y tiempo de frenado para la variación del coeficiente de deformación

	t_f (s)	a_{avg} (m/s^2)
-10%	146.9	37.8
Nominal	135.8	40.9
10%	135.2	41.1

5.2. Análisis cuantitativo

Por otro lado, cada variación utilizada altera diferentes índices de desempeño del sistema. En este estudio se utilizaron los cambios en 5 índices de desempeño: 1) el intervalo de tiempo entre el momento del choque y el primer momento en que se detiene la viga, Δt1. 2) la máxima aceleración detectada durante toda la prueba, Δamax. 3) el valor RMS en la aceleración durante la prueba, ΔRMS a. 4) el promedio del retraso temporal la viga respecto a la velocidad nominal, vd. 5) el promedio del retraso temporal de la viga respecto a la posición nominal del sistema, xd.

Cuando se consideran los tres parámetros más importantes y se fijan los demás se puede definir cada índice de desempeño Ψ como función de los tres parámetros.

$$\psi = f(E,p,I) \tag{4}$$

Ahora bien, en una vecindad alrededor de la condición nominal se puede aproximar esta función de manera lineal, truncando la expansión dada por la serie de Taylor del índice de desempeño.

$$\psi \approx f(E_0, p_0, I_0) + \sum_{\varphi \in \{E,p,I\}} \left(\Delta\varphi \left. \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right|_{E_0, p_0, I_0} \right) \tag{5}$$

Las derivadas parciales de cada índice de desempeño, con respecto a cada parámetro son los coeficientes de sensibilidad. Dichos coeficientes permiten realizar la aproximación lineal de cada función descrita, simplificando la comprensión del efecto de cada parámetro en el comportamiento del índice de desempeño cuando se está en la vecindad donde es válida la expansión en series de Taylor (y su posterior truncamiento induce un error acotado por una función cuadrática).

Los coeficientes de sensibilidad se obtuvieron por derivación numérica a partir de las simulaciones, utilizando la fórmula de cinco puntos [7] alrededor del valor nominal (6). Tras verificar la tendencia lineal, para el módulo de elasticidad y el momento de inercia se utilizaron variaciones comprendidas entre ±5% (-5%, -2.5%, 0%, 2.5%, 5%) y para el coeficiente de deformación se utilizaron variaciones comprendidas entre ±1% (-1%, -0.5%, 0%, 0.5%, 1%) (Figura 5)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(\vec{x}) \approx \frac{-f(\vec{x}+2\vec{h}) + 8f(\vec{x}+\vec{h}) - 8f(\vec{x}-\vec{h}) + f(\vec{x}-2\vec{h})}{12|\vec{h}|} \tag{6}$$

Donde $\vec{x}$ es el vector compuesto por los valores nominales de cada parámetro y $\vec{h}$ es el vector de cambio en una sola dimensión, aquella al parámetro φ.

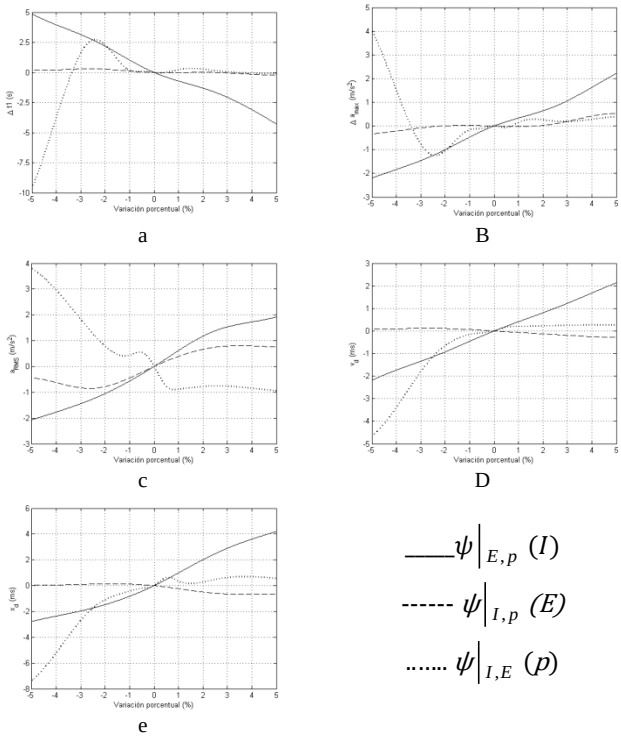

Figura 5: Comportamiento de los índices de desempeño al cambiar un solo parámetro a la vez. a) Cambio en el tiempo hasta la primera detención, Δt1 b) Cambio en la aceleración máxima, Δamax c) Cambio en la aceleración RMS d) Retraso temporal promedio respecto a la velocidad nominal, ód e) Retraso temporal promedio respecto a la posición nominal, xd

Como se puede ver en la Figura 5, las funciones ψ(I) y ψ(E) presentan una tendencia lineal entre ±5% de variación para los 5 índices en estudio. En cambio ψ(p) presenta un comportamiento no lineal en el mismo rango de variación, requiriendo una reducción del rango hasta ±1% de variación (donde el comportamiento es razonablemente lineal) para definir el intervalo usado para calcular los coeficientes de sensibilidad de p.

La Tabla 6 presenta los coeficientes de sensibilidad obtenidos para el tiempo hasta la primera detención. Para cambios porcentuales equivalentes, el momento de inercia es la propiedad frente a la cual es más sensible Δt1, en segundo lugar se ubica el coeficiente de deformación y, por último, el módulo de elasticidad.

Tabla 6: Coeficientes de sensibilidad calculados con la variación porcentual para Δt1

	Coeficiente de sensibilidad	Coeficiente de sensibilidad
$\frac{\partial(\Delta t1)}{\partial I}$	-85.5 ms/%	-6.84 ms/mm^4
$\frac{\partial(\Delta t1)}{\partial E}$	-6.5 ms/%	-0.032 ms/GPa
$\frac{\partial(\Delta t1)}{\partial p}$	-11.26 ms/%	-2.381 ms

La Tabla 7 presenta los coeficientes de sensibilidad obtenidos para la máxima aceleración detectada durante la prueba. Considerando nuevamente cambios porcentuales equivalentes, el momento de inercia es la propiedad que más altera a Δamax, mientras que el módulo de elasticidad es la propiedad que menos lo hace (se obtienen coeficientes para E y para p de orden comparable, frente al coeficiente asociado a I, que es mucho mayor).

Tabla 7: Coeficientes de sensibilidad calculados con la variación porcentual para Δamax

	Coeficiente de sensibilidad	Coeficiente de sensibilidad
$\frac{\partial(\Delta amax)}{\partial I}$	40.57 ms/%	3.24 m/s^2/mm^4

$\frac{\partial(\Delta \text{amax})}{\partial E}$	0.29 ms/%	0.001 m/s^2/GPa
$\frac{\partial(\Delta \text{amax})}{\partial p}$	0.68 ms/%	-0.144 m/s^2

La Tabla 8 presenta los coeficientes de sensibilidad obtenidos para el valor RMS de la aceleración. Este índice presenta un comportamiento diferente al de los demás, ya que para cambios porcentuales iguales el coeficiente de deformación es la propiedad que más lo altera. Se debe destacar que la vecindad donde la aproximación lineal es válida es pequeña, como se ve en la Figura 5c, que muestra cómo dicha vecindad está contenida dentro del intervalo definido como ±1% del valor nominal.

Tabla 8: Coeficientes de sensibilidad calculados con la variación porcentual para ΔRMS a

	Coeficiente de sensibilidad	Coeficiente de sensibilidad
$\frac{\partial(\Delta \text{RMSa})}{\partial I}$	57.11 ms/%	4.57 m/s^2/mm^4
$\frac{\partial(\Delta \text{RMSa})}{\partial E}$	38.61 ms/%	0.187 m/s^2/GPa
$\frac{\partial(\Delta \text{RMSa})}{\partial p}$	-153.96 ms/%	-32.549 m/s^2

La Tabla 9 presenta los coeficientes de sensibilidad obtenidos para el retraso temporal promedio respecto a la velocidad nominal, donde nuevamente la propiedad que más altera este índice para cambios porcentuales equivalentes es el momento de inercia, seguido por el coeficiente de deformación y por último el módulo de elasticidad.

Tabla 9: Coeficientes de sensibilidad calculados con la variación porcentual para vd

	Coeficiente de sensibilidad	Coeficiente de sensibilidad
$\frac{\partial(\Delta \text{vd})}{\partial I}$	42.95 ms/%	3.43 ms/mm^4
$\frac{\partial(\Delta \text{vd})}{\partial E}$	-6.29 ms/%	-0.031 ms/GPa
$\frac{\partial(\Delta \text{vd})}{\partial p}$	26.96 ms/%	5.7 ms

La Tabla 10 presenta los coeficientes de sensibilidad obtenidos para el retraso temporal promedio respecto a la posición nominal. Considerando como con los demás índices cambios porcentuales iguales, el momento de inercia y el coeficiente de deformación son las propiedades que más alteran el índice de desempeño (presentando coeficientes de sensibilidad del mismo orden), y el módulo de elasticidad es el que menos altera dicho índice.

Tabla 10: Coeficientes de sensibilidad calculados con la variación porcentual para xd

	Coeficiente de sensibilidad (ms/%)	Coeficiente de sensibilidad
$\frac{\partial(\Delta \text{xd})}{\partial I}$	89.15	7.13 ms /mm^4
$\frac{\partial(\Delta \text{xd})}{\partial E}$	-16.51	-0.08 ms/GPa
$\frac{\partial(\Delta \text{xd})}{\partial p}$	97.14	20.53 ms

6 ANÁLISIS DE VARIACIÓN COMERCIAL

Con el fin de realizar un análisis de la variación comercial de los índices estudiados, se realizó un estudio sobre la variación comercial de los parámetros en estudio: Para el módulo de elasticidad se realizó un estudio estadístico por medio de 10 pruebas de tensión en metales, según la norma ASTM E8 [1], de acero 1020 comercial de diferentes lotes, con el fin de encontrar una varianza comercial para dicho parámetro. Para el momento de inercia de la sección transversal se realizó un estudio sobre las tolerancias usadas en barras comunes. Se sugiere adelantar trabajos sobre el coeficiente de deformación; no se profundizó en el estudio de la variación de este coeficiente debido a la falta de información al respecto.

Con dicho estudio se calcularon los cambios comerciales que presenta el sistema en los índices de desempeño a partir de los resultados obtenidos.

6.1.1 Módulo de elasticidad

Los datos obtenidos para el módulo de elasticidad se presentan en la Tabla 11, donde se observa cómo la desviación estándar de los datos es de 12.4 GPa (6.0% con respecto al valor promedio).

Tabla 11: Dispersión de las pruebas de tensión

	Máximo	Mínimo	Promedio	Desviación
E(GPa)	229.8	187.6	213.2	12.4

La Tabla 12 muestra el cambio comercial que se presenta en los cinco índices estudiados con respecto a los 12.4GPa de desviación.

Tabla 12: Cambio en los índices de desempeño con originado por la variación comercial del módulo de elasticidad.

Índice de desempeño	Cambio
$\frac{\partial(\Delta \text{t1})}{\partial E}\Delta E$	0.39 ms
$\frac{\partial(\Delta \text{amax})}{\partial E}\Delta E$	0.012 m/s^2
$\frac{\partial(\Delta \text{RMSa})}{\partial E}\Delta E$	2.31 m/s^2
$\frac{\partial(vd)}{\partial E}\Delta E$	0.38 ms
$\frac{\partial(xd)}{\partial E}\Delta E$	0.99 ms

A pesar de que el módulo de elasticidad sea la propiedad que menos altera la respuesta del sistema en los cinco índices de desempeño estudiados, la variación de esta propiedad hace que los índices cambien significativamente. Por ejemplo, el cambio en la aceleración RMS es de casi 24% de una gravedad.

6.2.2. Momento de inercia

A partir del estudio adelantado sobre las tolerancias comerciales, se encontró que las tolerancias están entre 0.1mm y 0.2mm. La Tabla 13 muestra el cambio comercial que se presenta en los cinco índices de desempeño a partir de 0.2 mm de tolerancia geometrica. Esta tolerancia geometrica genera pequeñas variaciones en el momento de inercia (menores al 2.3% con respecto al valor nominal).Combinando esta variación con los coeficientes de sensibilidad obtenidos previamente se obtuvo que el moemnto de inercia produce la variación más importante en cuatro de los cinco índices estudiados.

Tabla 13: Cambio en los índices de desempeño con la variación de 0.2mm de tolerancias

Índice de desempeño	Cambio
$\frac{\partial(\Delta \text{t1})}{\partial I}\Delta I$	1.97 ms
$\frac{\partial(\Delta \text{amax})}{\partial I}\Delta I$	0.93 m/s^2
$\frac{\partial(\Delta \text{RMSa})}{\partial I}\Delta I$	1.31 m/s^2
$\frac{\partial(vd)}{\partial I}\Delta I$	0.99 ms
$\frac{\partial(xd)}{\partial I}\Delta I$	2.05 ms

CONCLUSIONES

La sensibilidad en el modelamiento de impactos dentro del rango de tasas de deformación medias que inducen una deformación plástica a flexión se analizó tanto cualitativa como cuantitativamente. Se utilizó un modelo validado con mediciones experimentales, que incluye la relación constitutiva propuesta por *Cowper & Symonds* para representar el comportamiento dinámico del material. Se estudió la sensibilidad del modelo frente al momento de inercia del área transversal, el módulo de Young y el coeficiente de deformación, observando el cambio en las historias temporales de la aceleración y también calculando los coeficientes de sensibilidad asociados a cada uno de estos parámetros. Al considerar cambios porcentuales equivalentes se encuentra que el parámetro más sensible es el momento de inercia del área

transversal (de cinco índices de desempeño estudiados, resulta ser el más sensible en tres casos y el segundo más sensible en los otros dos), seguido por el coeficiente de deformación (resulta ser el más sensible para dos índices y el segundo más sensible en los otros dos). En el proceso de calcular los coeficientes de sensibilidad se observó que el parámetro en el cual la no linealidad es más importante es el coeficiente de deformación, para el cual las vecindades donde la aproximación lineal es razonable están por debajo del ±1% de variación respecto al valor nominal. Se presenta un análisis donde se relacionan los intervalos temporales donde la sensibilidad frente al coeficiente de deformación es mayor con los instantes donde se obtienen los máximos de las tasas de deformación.

Los resultados del análisis de sensibilidad se unen con la variabilidad comercial que se presenta en las barras de aceros de bajo carbono para estimar los cambios que se obtienen en los resultados si no se realizan controles de calidad estrictos en el material (en su caracterización en rango elástico) y la geometría a utilizar. Más allá del valor obtenido para el caso del uso de un material comercial sin ningún control adicional (considerando la variabilidad comercial no controlada), este análisis permite definir el control de calidad requerido sobre los materiales y la geometría a partir de las condiciones aceptables de repetibilidad. Se plantea una línea de trabajo futuro, que es la cuantificación de la variación en las propiedades dinámicas de los materiales, sobre la cual no hay información en el momento.

REFERENCIAS

[1] ASTM International. (2008). Tension Testing of Metallic Materials. American Association State

[2] Cidaut. (2002). Mechanical behaviour of materials II. Dynamic. Retrieved from www.autotrain-europe.com

[3] Gobbi, M., Masttinu, G., Muñoz, L., & Pandolfi, A. (2008). Numerical-experimental analysis of metal bars undergoing intermediate strain rate impacts. Computational Mechanic

[4] Cowper GR. Symonds (1957) Strain hardening and strain rate effects in the impact loading of cantilever beams. Brown University. Division of Applied Mathematics report no 28.

[5] Dean A, Voss D(1999) Design and analysis of experiments. Springer, New York.

[6] Cunat PJ (2000). Stainless steel properties for structural automotive applications. In: Metal bulletin international automotive materials conference, Cologne

[7]Burden RL. Faires JD (1995). Análisis numeric.6ªEdición Thomson Editores. Mexico DF